

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПОЛОЖЕНИЯ И РАЗМЕРОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОХОДОВ ПРИ РАЗМЕЩЕНИИ ФЭП НА КРЫШЕ

- **Низамутдинов В.Р.**, ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)», г. Челябинск, Россия

## A MATHEMATICAL MODEL FOR OPTIMIZING THE POSITION AND SIZE OF TECHNOLOGICAL PASSAGES FOR ROOFTOP SOLAR PANEL INSTALLATIONS

- **Nizamutdinov V.R.**, South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia

В настоящей работе предлагается смешанно-целочисленная линейная модель (MILP), обеспечивающая оптимальное размещение фотоэлектрических панелей на плоской крыше здания с учётом: дискретизации площади крыши и учёта реальных габаритов панелей различных производителей; максимизации суммарной выработки электроэнергии при заданной инсоляции (для условий г. Челябинска); обязательного обеспечения технологических проходов, в том числе гарантированного доступа к каждой панели и выделения зоны входа; возможности учёта стоимостных ограничений и бюджета проекта. Модель позволяет формализовать инженерные требования к размещению оборудования и получить гарантированно оптимальное решение при заданных ограничениях. Её результаты могут быть использованы на этапе предпроектной проработки солнечных электростанций, а также для сравнительного анализа эффективности панелей различных производителей в конкретных климатических и конструктивных условиях.

**Ключевые слова:** фотоэлектрическая панель, солнечная электростанция, технологические проходы.

This paper proposes a mixed-integer linear model (MILP) that ensures optimal placement of photovoltaic panels on a flat building roof, taking into account: roof area discretization and the actual dimensions of panels from different manufacturers; maximizing total electricity generation under a given insolation (for Chelyabinsk conditions); mandatory provision of technological passages, including guaranteed access to each panel and a designated entry area; and the ability to account for cost constraints and the project budget. The model allows for formalizing engineering requirements for equipment placement and obtaining a guaranteed optimal solution within the given constraints. Its results can be used during the pre-design phase of solar power plants, as well as for comparative analysis of the efficiency of panels from different manufacturers under specific climatic and structural conditions.

**Key words:** photovoltaic panel, solar power plant, technological passages.

### Введение

В современных условиях развития распределённой энергетики размещение фотоэлектрических панелей (ФЭП) на крышах зданий

становится одним из наиболее эффективных способов использования возобновляемых источников энергии. При этом задача оптимального размещения ФЭП носит многокритериальный характер: необходимо одновременно учитывать

технические ограничения (площадь и конфигурация крыши, габариты панелей, требования к обслуживанию), энергетические показатели (коэффициент преобразования, уровень инсоляции) и экономические факторы (стоимость панелей разных производителей, бюджетные ограничения).

Для города Челябинска, где среднегодовой уровень солнечной радиации и климатические условия определяют специфику эксплуатации солнечных установок, особую важность приобретает максимизация выработки электроэнергии при жёстких ограничениях по доступной площади и необходимости обеспечения технологических проходов для обслуживания оборудования. Кроме того, на практике часто требуется рассмотреть варианты установки панелей от разных производителей, отличающихся габаритами, КПД и стоимостью, что усложняет задачу выбора оптимальной конфигурации.

Традиционные подходы, основанные на ручном подборе вариантов или простых эвристиках, не позволяют гарантировать достижение глобального оптимума и не масштабируются при увеличении числа типов панелей и размеров объекта.

В связи с этим актуальной является разработка математической модели, формализующей задачу размещения ФЭП как задачу дискретной оптимизации.

## Материалы и методы

Рассматривается задача максимизации суммарной выработки электроэнергии фотоэлектрическими панелями на плоской крыше здания при ограничениях по площади, габаритам панелей, технологическим проходам и доступности обслуживания.

Индексация и параметры, пусть:  $I = \{1, \dots, N_x\}$ ,  $J = \{1, \dots, N_y\}$  – множества индексов ячеек дискретной сетки крыши по осям  $x$  и  $y$ ,  $\Delta$  – шаг дискретизации (м),  $L_x = N_x \Delta$ ,  $L_y = N_y \Delta$ ,  $P$  – множество типов панелей,  $p$  находится в области  $P$ ,  $a_p, b_p$  – габариты панели типа  $p$  (м),  $\eta_p$  – коэффициент преобразования (КПД) панели типа  $p$ ,  $G$  – освещённость на горизонтальной поверхности (Вт/м<sup>2</sup>), для Челябинска принято  $G=500$  Вт/м<sup>2</sup>,  $w_{min}$  – минимальная ширина технологического прохода (м),  $(x_{ent}, y_{ent})$  – координаты точки входа/доступа к зоне обслуживания.

Для каждого типа панели  $p$  определим количество ячеек по осям:

$$n_p = \left\lfloor \frac{a_p}{\Delta} \right\rfloor \quad (1)$$

$$m_p = \left\lfloor \frac{b_p}{\Delta} \right\rfloor \quad (2)$$

Выработка одной панели типа  $p$ :

$$P_p = G \cdot a_p \cdot b_p \cdot \eta_p \quad (3)$$

Множество допустимых позиций для панели типа  $p$ :

$$K_p = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq N_x - n_p + 1, 1 \leq j \leq N_y - m_p + 1\}. \quad (4)$$

Введём бинарные переменные:  $x_{p,i,j}$  находится в области  $\{0, 1\}$ ,  $p$  в области  $P$ ,  $(i, j)$  в области  $K_p$ :  $x_{p,i,j}=1$ , если панель типа  $p$  установлена с привязкой к ячейке  $(i, j)$  (левый нижний угол);  $a_{i,j}$  находится в области  $\{0, 1\}$ ,  $(i, j)$  в области  $I \times J$ :  $a_{i,j}=1$ , если ячейка  $(i, j)$  является технологическим проходом.

Максимизация суммарной выработки:

$$\max_{x,a} \sum_{p \in P} \sum_{(i,j) \in K_p} P_p \cdot x_{p,i,j}. \quad (5)$$

## Ограничения модели

1. Непересечение панелей и проходов. Каждая ячейка может быть либо занята панелью, либо являться проходом, но не одновременно:

$$\sum_{p \in P} \sum_{\substack{(i',j') \in K_p \\ (i,j) \in \text{zone}(p,i',j')}} x_{p,i',j'} + a_{i,j} \leq 1, \forall (i,j) \in I \times J, \quad (6)$$

где  $\text{zone}(p, i', j')$  – множество ячеек, покрываемых панелью типа  $p$ , установленной в позиции  $(i', j')$ .

2. Обеспечение доступа к каждой панели. Для каждой установленной панели должен существовать хотя бы один смежный проход (по стороне, не по углу):

$$x_{p,i,j} \leq \sum_{(k,l) \in \text{neigh}(i,j)} a_{k,l}, \forall p \in P, \forall (i,j) \in K_p, \quad (7)$$

где  $\text{neigh}(i, j)$  – множество соседних по стороне ячеек (верх, низ, лево, право), попадающих в пределы крыши.

3. Обязательный проход в точке входа. Ячейка, содержащая точку входа, должна быть проходом:

$$a_{i_{ent}, j_{ent}} = 1, \quad (8)$$

где  $(i_{ent}, j_{ent})$  – индексы ячейки, содержащей  $(x_{ent}, y_{ent})$ .

4. Бинарность переменных:

$$x_{p,i,j} \in \{0,1\}, \quad a_{i,j} \in \{0,1\}. \quad (9)$$

## Результаты

Оптимальное решение  $(x^*, a^*)$  даёт: оптимальное размещение панелей: множество троек  $(p, i, j)$ , для которых  $x_{p,i,j}^* = 1$ , конфигурацию проходов: множество пар  $(i, j)$ , где  $a_{i,j}^* = 1$ , суммарную выработку:  $P_{total} = \sum_{p,i,j} P_p x_{p,i,j}^*$ .

Статус решения MILP-задачи (например, Optimal) подтверждает, что найдено глобально оптимальное размещение при заданных ограничениях.

Основные показатели решения сведены в таблицу 1.

На рисунке 1 представлено оптимальное размещение фотоэлектрических панелей (тип А, красный цвет) и технологических проходов (серый цвет) на плоской крыше здания. Вход в зону обслуживания выделен красной точкой.

Статус Optimal означает, что MILP-модель нашла глобально оптимальное решение при заданных ограничениях (площадь, проходы, габариты панелей). 40 панелей – это итоговое количество установленных модулей типа А (в текущей кон-

**Таблица 1 – Итоговые показатели оптимального размещения ФЭП**

| Показатель                       | Значение               |
|----------------------------------|------------------------|
| Статус решения                   | Optimal                |
| Установлено панелей              | 40 шт.                 |
| Суммарная выработка              | 6460,0 Вт              |
| Площадь крыши                    | 12×8=96 м <sup>2</sup> |
| Средняя освещённость (Челябинск) | 500 Вт/м <sup>2</sup>  |

фигурации другие типы не вошли в оптимальное решение из-за соотношения площади, КПД и стоимости). - 6460 Вт — суммарная расчётная выработка при средней освещённости 500 Вт/м<sup>2</sup> (для Челябинска). В реальных расчётах значение можно уточнить по месячным данным солнечного атласа. - Технологические проходы обеспечивают доступ к панелям для обслуживания и соответствуют минимальной ширине 1 м.

## Выводы

По итогам работы математической модели оптимизации размещения фотоэлектрических панелей для условий Челябинска можно сделать следующие выводы:

1. Статус «Optimal» означает, что модель нашла наилучшее возможное размещение панелей при всех заданных ограничениях – вручную или простыми подборками такого результата добиться сложно.

2. На крыше площадью 96 м<sup>2</sup> (12×8 м) установлено 40 панелей типа А. При уровне инсоля-

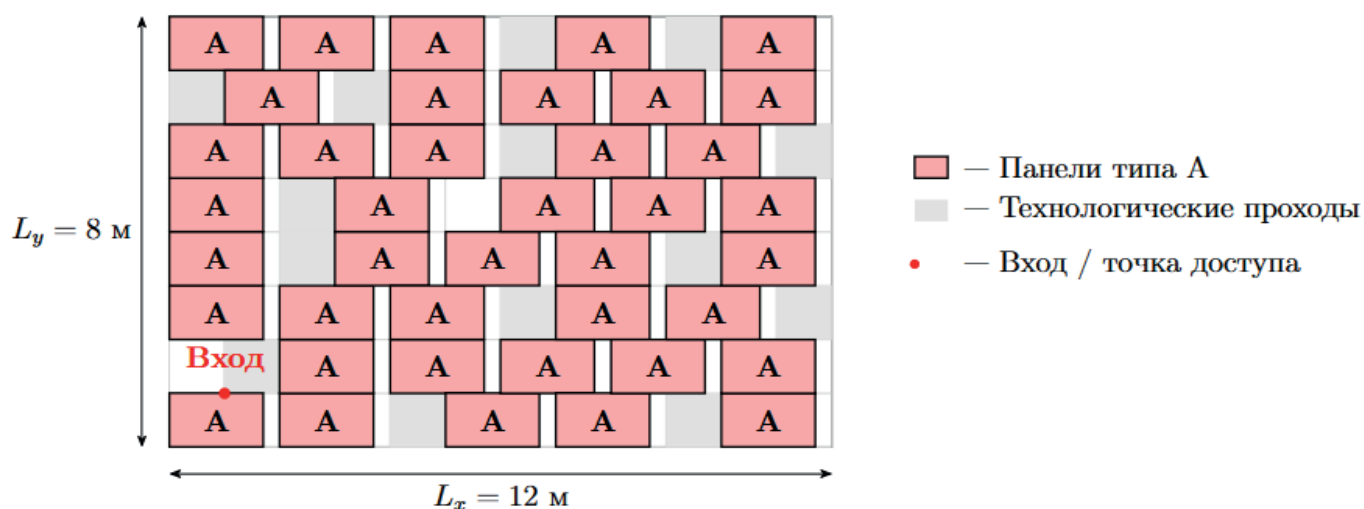


**Рис. 1. Оптимальное размещение ФЭП и проходов на крыше здания (12×8 м) для условий г. Челябинска**

ции 500 Вт/м<sup>2</sup> суммарная выработка составила 6460 Вт. Такое количество и расположение — результат компромисса: учтены габариты панелей, их КПД и необходимость оставить проходы для обслуживания.

3. Модель гарантирует, что рядом с каждой панелью есть проход шириной не менее 1 м, а ячейка с точкой входа обязательно остаётся свободной. Это важно для регулярного осмотра, чистки и ремонта.

4. В модель заложены параметры для разных типов панелей — габариты, КПД и стоимость. Если добавить в расчёт панели других производителей, модель сама пересчитает лучший вариант: либо максимальную выработку, либо оптимальное соотношение «цена — мощность».

## Список литературы

1. Возможности использования возобновляемых источников энергии для независимого энергообеспечения промышленного предприятия ООО «Челябинскспецгражданстрой» / В. Р. Низамутдинов, И. А. Моисеев, И. А. Берсенева [и др.] // Вестник Южно-Уральского государ-

ственного университета. Серия: Энергетика. — 2023. — Т. 23, № 1. — С. 89-98. — DOI 10.14529/power230109.

2. Moiseev I.A., Shishkov A.N., Berseneva I.A., Osintzev K.V. Simulation of the operation of the solar panel of the pilot plant in the Ansys software package // IOP Conference Series Earth and Environmental Science. 2022; Vol. 990 (1). P. 012059. DOI: 10.1088/1755-1315/990/1/012059.

## References

1. Possibilities of using renewable energy sources for independent power supply of the industrial enterprise Chelyabinskspetsgrazhdanstroy LLC / V. R. Nizamutdinov, I. A. Moiseev, I. A. Berseneva [et al.] // Bulletin of the South Ural State University. Series: Power Engineering. - 2023. - Vol. 23, No. 1. - P. 89-98. - DOI 10.14529/power230109.

2. Moiseev I.A., Shishkov A.N., Berseneva I.A., Osintzev K.V. Simulation of the operation of the solar panel of the pilot plant in the Ansys software package // IOP Conference Series Earth and Environmental Science. 2022; Vol. 990 (1). P. 012059. DOI: 10.1088/1755-1315/990/1/012059.

## Сведения об авторах

**Низамутдинов Вадим Ринатович** — аспирант кафедры «Промышленная теплоэнергетика», ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)», г. Челябинск, Россия, [pte@susu.ac.ru](mailto:pte@susu.ac.ru).

## About the authors

**Nizamutdinov Vadim Rinatovich** — postgraduate student, Department of Industrial Thermal Power Engineering, South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia, [pte@susu.ac.ru](mailto:pte@susu.ac.ru).

**Дата поступления рукописи:** 20.07.2026

**Дата принятия рукописи:** 18.09.2026